Chapitre III

Tableaux, graphiques et formules.

Introduction.

Dans ce chapitre nous allons étudier des situations dans lesquelles il y a une relation entre deux grandeurs. On peut aussi préciser qu'une des grandeurs (la variable dépendante) dépend de l'autre (la variable indépendante)
Explication par quelques exemples :

a) Je prends de l'essence à la pompe : la somme à payer dépend de la quantité de litres que j'ai prise. On dit aussi que « la somme à payer est fonction du nombre de litres ». Les mathématiciens écrivent en abrégé : s = f(l) (s = la somme à payer variable dépendante, et l = le nombre de litres variable indépendante).
b) Ma facture d'électricité dépend du nombre de kilowattheures que j'ai consommés. Ma facture est fonction de ma consommation.
c) La température en montagne dépend de l'altitude. La température est fonction de l'altitude ou , écrit comme les mathématiciens : T = f(a)
d) Trouve d'autres situations de dépendance :

En mathématique, on appelle ces situations : des fonctions. On peut les représenter soit sous forme de tableaux, soit sous forme de graphiques ou sous forme de formules.
Pour nous familiariser avec cette nouvelle notion, découvrons la distance d'arrêt d'un véhicule en fonction de sa vitesse.

1. Distances d'arrêt.[1]

La distance d'arrêt d'un véhicule, est la somme de deux distances :

- la distance de réaction : c'est la distance parcourue entre l'instant où le conducteur aperçoit l'obstacle et celui où il se met à freiner.
- la distance de freinage : la distance parcourue entre le moment où le conducteur commence à freiner et le moment où le véhicule s'immobilise.

Voici un tableau de la gendarmerie qui nous donne, pour différentes vitesses, les distances de réaction, les distances de freinage (sur sol sec) et les distances d'arrêt.

Vitesse v (en km/h)	Distance de réaction d_r (en mètres)	Distance de freinage d_f (en mètres)	Distance d'arrêt d_a (en mètres)
30	9	4,5	13,5
50	15	12,5	27,5
70	21	24,5	45,5
90	27	40,5	67,5
120	36	72	108

Ce tableau étant fort incomplet, nous souhaitons trouver une formule permettant de calculer les distances d'arrêt pour n'importe quelle autre vitesse.

Pour fixer les idées, disons que nous allons d'abord chercher quelle serait la distance d'arrêt pour une vitesse de 60 km/h puis nous essayerons de généraliser pour une vitesse quelconque v.

a) ***Quelle serait la distance de réaction (en mètres) pour une vitesse de 60 km/h ?***

Observe les deux premières colonnes du tableau. Que constates-tu ? Traduis ces informations sur un graphique. En abscisse, tu placeras la variable indépendante (ici c'est la vitesse) et en ordonnée la variable dépendante (ici la distance de réaction) Quelle égalité mathématique peux-tu écrire entre d_r et v ?

[1] D'après « De question en question 3 » Hatier

Complète ton graphique en réunissant les différents points. Que constates-tu ?
Déduis alors la distance de réaction pour une vitesse de 60 km/h

b) *Quelle serait la distance de freinage (sur sol sec et en mètres) pour une vitesse de 60 km/h ?*

Observe les colonnes 1 et 3 du tableau. A-t-on affaire à une situation de proportionnalité ?
Pour mieux découvrir la relation entre la distance de freinage et la vitesse, représentons la sur le même graphique en changeant de couleur.

La forme du graphique n'est pas habituelle, il est difficile de trouver la formule sans un petit coup de pouce. La distance de freinage ne serait-elle pas proportionnelle au carré de la vitesse ? Reformons un tableau dans lequel le carré de la vitesse apparaîtra et vérifions si nous avons une situation de proportionnalité.

v	**v^2**	**d_f**
30		4,5
50		12,5
70		24,5
90		40,5
120		72

d_f est-elle proportionnelle à v^2 ?
Quelle égalité peux-tu écrire entre d_f et v^2 ?
Complète ensuite ton graphique avec les valeurs intermédiaires en réunissant les points de la manière la plus logique. Que constates-tu ?
Déduis alors la distance de freinage pour une vitesse de 60km/h

c. ***Quelle serait la distance d'arrêt sur sol sec et en mètres pour une vitesse de 60 km/h ? Puis de manière générale pour n'importe quelle autre vitesse***.

En réunissant les deux formules découvertes plus haut, établis la formule générale qui donnera la distance d'arrêt en fonction de la vitesse du véhicule.
On peut maintenant utiliser cette formule pour calculer la distance d'arrêt pour n'importe quelle vitesse.
Par exemple : Quelle est donc la distance d'arrêt à 60 km/h ?

Et à 80 km/h ? Et à 100 km/h ? Et à 140 km/h ?

Représente sur le même graphique que les deux cas précédents, la distance d'arrêt en fonction de la vitesse.

2. Situation de proportionnalité : fonction linéaire.

Ce 20 novembre 2011, on pouvait obtenir 1,35 $ pour un euro.

a) Complète le tableau ci-dessous.

X= euros	0	1	2	5	6,5	8	12
Y= dollars							

b) Représente graphiquement cette situation (en abscisse x les euros et en ordonnée y = les dollars)
c) Ecris la formule qui permet de passer des euros aux dollars

3. Situation affine.

Une société de déménagement pratique le tarif suivant : pour tout déménagement, il y a un forfait de 35€ à payer augmenté de 0,8€ par kilomètre.

a) Complète le tableau suivant :

X= nombre de km	0	10	20	40	60	80	95	100
Y = coût total en €								

b) Construis un graphique (abscisse = x et ordonnée = y)
c) Etablis une formule qui permet de calculer le prix à payer (y) en fonction du nombre de km (x)

4. **Situation constante.**

Dans la société de déménagement précédente, il existe un autre tarif : quelques soient le nombre de km à parcourir, le prix sera toujours de 90€.

a) Imagine un tableau de nombres représentant cette situation.
b) Représente graphiquement cette situation (utilise le graphique précédent et change de couleur)
c) Trouve la formule.

Première synthèse

1) Une **fonction** est une relation qui lie un nombre à un autre nombre. (On affinera cette définition lacunaire par la suite)

2) Le nombre qui dépend de l'autre s'appelle **variable dépendante**, on le représente souvent par la lettre **y** et graphiquement, il est représenté par les ordonnées du graphique.
Le nombre dont dépend l'autre s'appelle **variable indépendante** et est souvent représenté par la lettre **x**. Il est représenté par les abscisses sur un graphique.
Pour exprimer cette dépendance, on écrit : $y = f(x)$ (on lit : y égale f de x)

3) Il y a trois manières de représenter une fonction, à chaque fois il y a des avantages et des inconvénients :

Le **tableau de nombres**

Le **graphique** :

La **formule** :

4) Une fonction **linéaire** :

tableau :

graphique :

formule :

Une fonction **affine** :

tableau :

graphique :

formule :

Une fonction **constante**

tableau :

graphique :

formule :

5. **Taxis drivers**

A Bruxelles, il existe plusieurs compagnies de Taxis. Chaque compagnie pratique un tarif spécifique.[2]

Taxis Bleus

<u>TARIFS</u> au 1 septembre 2011

Description	Jour : 7/7 06.00 h. à 22.00h.	Nuit : 7/7 22.00h à 06.00 h.
Prise en charge:	**2.40 €**	**4.40 €**
Tarif (prix au Km):	**1.50 €**	**1.50 €**
Heure d'attente:	**30.00 €**	**30.00 €**

Les taxis verts et orange

Le tarif pratiqué est d'une simplicité enfantine. N'importe quelle course dans la région bruxelloise coûte 24€ quelque soit la longueur du trajet et quelque soit l'heure.

Unitax

Description	Jour : 7/7 06.00 h. à 22.00h.	Nuit : 7/7 22.00h à 06.00 h.
Prise en charge:	**5.40 €**	**8.40 €**
Tarif (prix au Km):	**0,8 €**	**1 €**
Heure d'attente:	**15.00 €**	**15.00 €**

a) Calcule le prix que devrait payer un usagé s'il doit faire une course de 5km dans Bruxelles en journée, pour chaque compagnie de taxis. Que lui conseilles-tu alors ?
b) Même question pour une course de 12km.
c) Même question pour se rendre de nuit, dans une commune de Bruxelles située à 17km.

- Construis un graphique sur lequel les 3 compagnies apparaissent pour le cas de trajets avant 22h.
- Fais un autre graphique dans le cas de trajets de nuit.
- Donne pour chaque tarif une formule qui donne le prix à payer en fonction du nombre de kilomètres.
- Tire les conclusions et donne un conseil général d'utilisation du taxi à Bruxelles.

---

[2] Attention les tarifs ne sont plus en vigueur en 2011 sauf pour les taxis bleus de plus il existe un 2ème tarif pour les courses hors de Bruxelles.

- Pour quelle longueur de course le prix du taxi bleu sera le même que chez Unitax le jour ? Et le nuit ?
- Pour quel kilométrage, dans Bruxelles aura-t-on intérêt à prendre le taxi Vert et orange le jour ? Et la nuit ?

6) Tarifs d'électricité

Voici les tarifs normaux résidentiels pour deux compagnies d'électricité :

Compagnie A : redevance fixe annuelle : 55,51€
prix unitaire par KWh : 8,49 cent€ (0,0849 €)

Compagnie B : redevance fixe annuelle : 82€
prix unitaire par KWh : 4,79 cent€

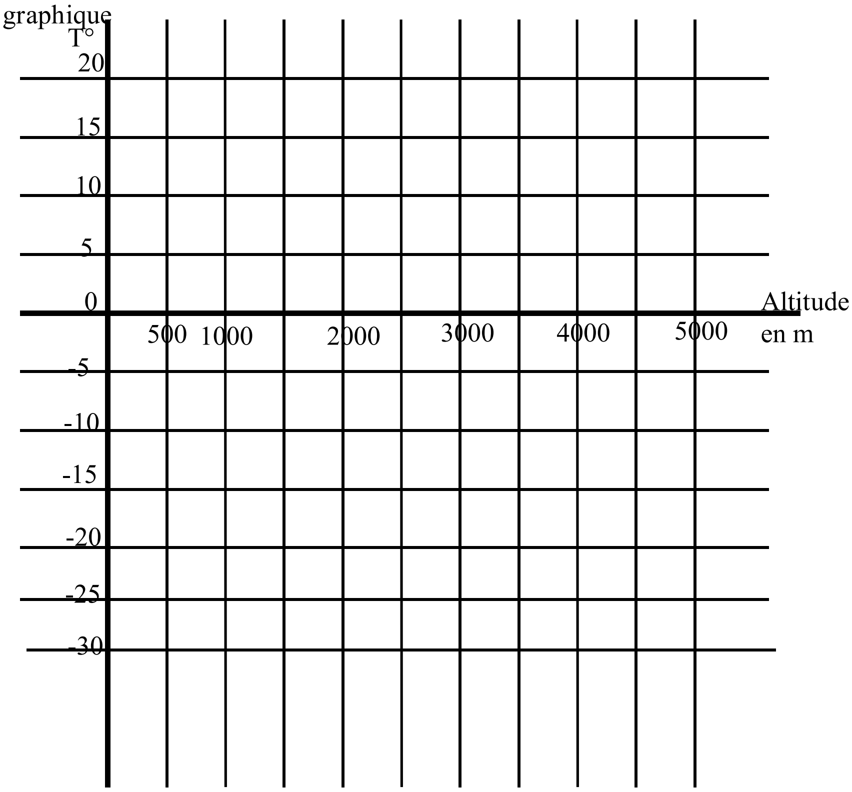
a) Quels sont les montants à payer dans les deux cas pour respectivement des consommations annuelles de 1250 KWh, 2500 KWh , et 3600 KWh . Exprime le prix à payer en fonction d'une consommation de x KWh.
b) Fais un graphique et trouve pour quelles consommations annuelles les montants des deux compagnies seraient égaux.
c) Dans quel cas serait-il préférable d'adhérer à la compagnie A et dans quel cas à la compagnie B ?

7) Température et altitude.

On a relevé les températures avec un ballon sonde à différentes altitudes. (voir ci-dessous)
Relevé des températures avec le ballon sonde. La température au niveau de la mer est de 18°.

Altitude en mètres : h	0	500	1000	1500	2000	3000	5000
Température en degrés centigrades : T	18	13,5	9	4,5	0	-9	-27

a) Construis le graphique



b) A-t-on affaire à une situation de proportionnalité ?
c) Trouve la formule qui traduit cette situation en appelant T la température et h la hauteur. Que vaut le taux d'accroissement ? Que signifie-t-il ?
d) Quelle est la température à une altitude de 2500m ? de 7000m ? et si l'altitude était négative par exemple -500m sous le niveau de la mer ?
e) A quelle altitude trouve-t-on une température de 5° ? et de -20° ? et 26° ?

8. Balade

Une avenue AB est longue de 1,2 km. A 12h, un piéton entre par le côté A et marche à la vitesse constante de 3,6 km/h. A 12h05, un autre piéton entre par le côté B et remonte l'avenue à la vitesse constante de 5,4 Km/h.

a) Représente graphiquement cette situation. En ordonnée, il y aura les longueurs parcourues dans l'avenue avec comme origine le point A. En abscisse, le temps avec comme origine 12h considéré comme 0.
b) Ecris les formules qui décrivent l'endroit où se trouve chacun des piétons en fonction de l'heure.
c) A quel moment précis ceux-ci vont-ils se rencontrer ? Ecris l'équation qui traduit cela.

9. Videoclub

Dans un vidéoclub de ma région, on propose trois formules de location de DVD :

formule 1 : un DVD se loue 3€ ;
formule 2 : un DVD se loue 2,4€, à condition de payer un abonnement annuel de 8€ ;
formule 3 : un abonnement annuel de 45€, le client ne paie pas de location par DVD

a) Pour chaque formule, quelle sera la dépense annuelle si on loue 10 DVD, 45 DVD, 60 DVD et n'importe quel nombre de DVD (par exemple x)
b) En considérant qu'une année est composée de 52 semaines, cherche la formule la plus avantageuse pour une location annuelle de : un ,DVD par semaine
Un DVD par quinzaine
Un DVD par mois.
c) Le budget annuel d'une famille consacré à la location de DVD est de 40€ . Combien de DVD pourra-t-elle louer par an si elle choisit la formule la plus avantageuse.
d) Cherche la formule la plus avantageuse en fonction du nombre de DVD loués annuellement.
e) Un ami m'a confié qu'une année, il avait fait un mauvais choix de formule et qu'avec la formule 1, il avait payé 50% de plus qu'avec la formule 3. Combien de DVD a-t-il loué cette année là ?
Et s'il avait dû payer 50% de plus avec la formule 2 qu'avec la formule 3, quel aurait été le nombre de DVD loués ?

Synthèse (2) :

1. Toute fonction dont la représentation graphique est une droite peut se décrire avec la formule (on dit aussi l'équation de la droite)

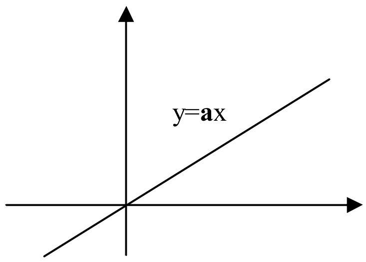
$$y=ax+b$$

y représente la variable dépendante
x représente la variable indépendante
a et **b** sont des nombres qui dépendent des caractéristiques de la fonction.

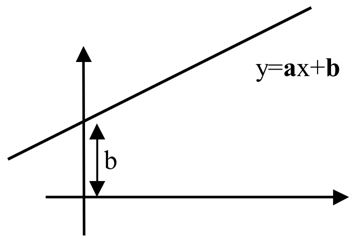
2. Recherche des valeurs de **a** et **b** dans différents cas.

a**) la droite passe par (0,0) : fonction linéaire.**

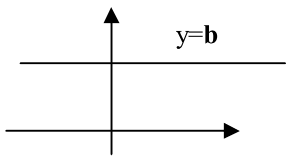
La fonction est donc une situation de proportionnalité : **b** = 0
a sera le coefficient de proportionnalité : on le trouve en faisant le rapport entre une valeur de y par la valeur correspondante x. C'est aussi la « pente » de la droite. (on dit aussi : taux d'accroissement ou coefficient angulaire). Si la fonction est **croissante**, c'est-à-dire si la droite « monte » quand on se déplace de gauche à droite (sens de la flèche) la valeur de **a** sera positive. Dans le cas contraire (fonction **décroissante**), le **a** sera négatif.



b) **la droite ne passe pas par (0,0) : fonction affine.**
Le graphique se traduit par une droite parallèle à la droite y=**a**x
On trouve le **a** en calculant la « pente » de la droite (attention au signe). Cette pente peut se calculer à partir de deux points : $a = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$
b correspond au décalage vertical de la droite par rapport à (0,0) ; il correspond à l'intersection de la droite et de l'axe vertical. Si on ne le donne pas, on peut le calculer en remplaçant x et y par un point donné de la fonction et **a** par la pente calculée plus haut dans la fonction de base y=**a**x+**b**. On résout alors l'équation pour trouver **b**.

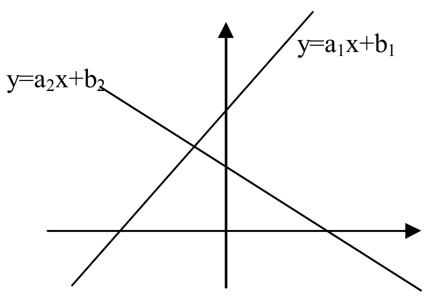


c) **La droite est horizontale : fonction constante**.
Dans ce cas la formule se ramène à y=**b**



3. Intersection de deux droites

Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites d'équation : $y=a_1x+b_1$ et $y=a_2x+b_2$, il faut résoudre l'équation : $\mathbf{a_1x+b_1 = a_2x+b_2}$
On trouve alors la valeur de x pour laquelle les deux fonctions sont égales. Pour trouver y, il suffit de remplacer x par cette valeur trouvée dans l'une ou l'autre formules.

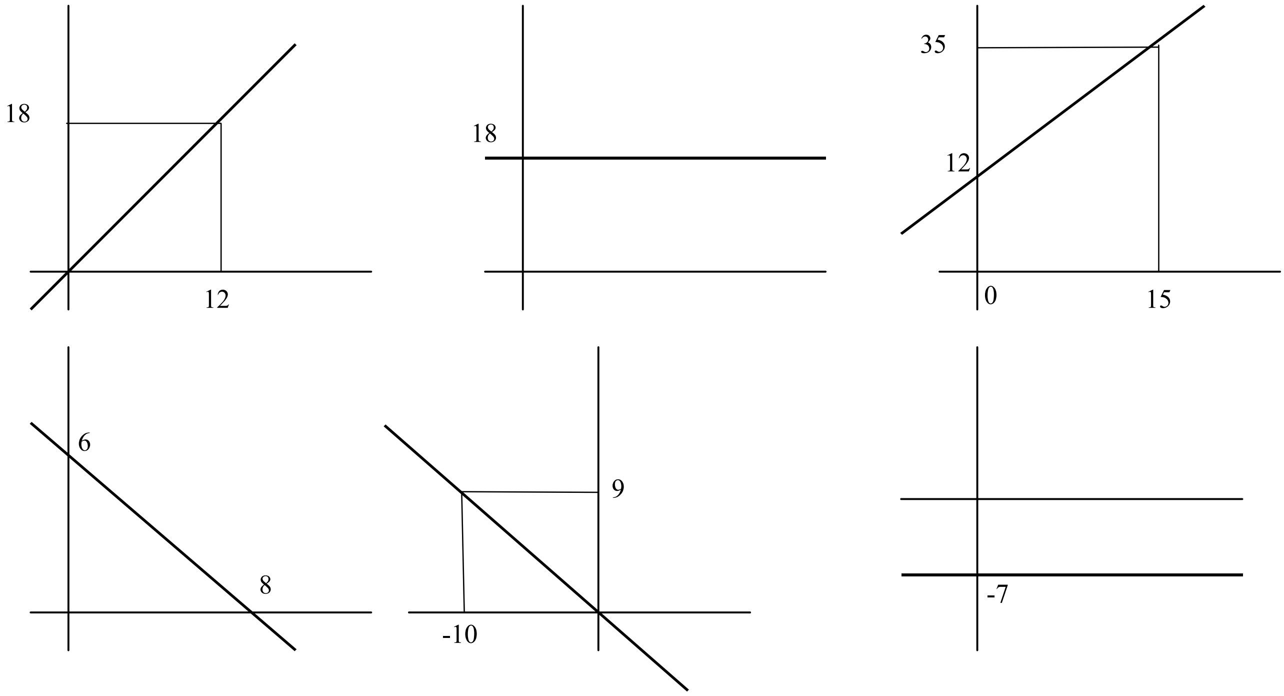


4. Racine d'une fonction :

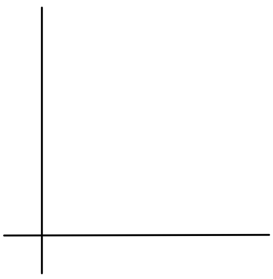
On appelle « racine d'une fonction » la valeur de la variable indépendante (x) qui rend la fonction nulle (y = 0).
C'est l'abscisse du point d'intersection de la droite avec l'axe des x.
Dans l'équation y = ax + b il suffit de donner à y la valeur 0. On trouve alors **x = -b/a**.

Exercices sur les équations de droites.

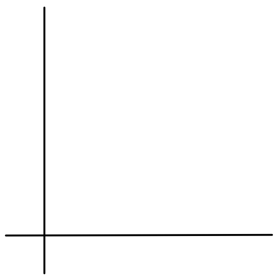
1. Détermine dans les cas suivants la formule qui correspond aux graphiques suivants.



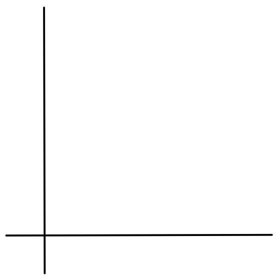
2. Dessine le graphique des fonctions dont la formule s'écrit :



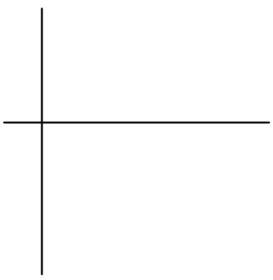
y=x+2



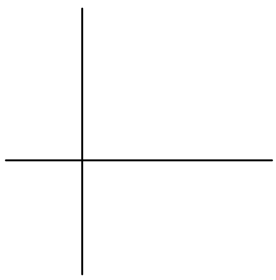
y=2x



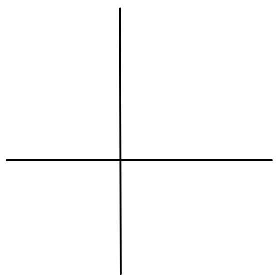
y=4



y= -3



y= -0,5x+2



Y = -2x-5

3. Détermine l'équation des droites qui répondent aux critères suivants

a) la droite passe par **(0,0)** et **(5,6)**
b) la droite passe par **(0,0)** et **(-3,-6)**
c) la droite passe par les points **(5,2)** et **(3,4)**
d) le taux d'accroissement de la droite est de **0,2** et elle passe par **(0,0)**
e) le taux d'accroissement est de **2** et elle passe par **(0,7)**
f) le taux d'accroissement est de **-2** et elle passe par le point **(0,-6)**
g) elle passe par **(-3,-2)** et **(2,3)**
h) elle est parallèle à la droite d'équation : **y = 5x** et passe par le point **(0,2)**
i) elle est parallèle à l'axe des x et passe par le point **(2,5)**
j) elle est parallèle à la droite d'équation **y = -5x+3** et passe par le point **(3,5)**
k) elle passe par **(0,0)** et est parallèle à la droite dont l'équation est **y = -8x+2**
l) elle passe par les points **(1/2 , ¾)** et **(1/3, 3/5)**
m) le taux d'accroissement est de **-1/2** et elle passe par le point **(-3/5,-2/3)**

4. Quel est le point d'intersection des droites a et b dont les équations respectives sont :
   a : y = 5x-3 et **b : y = 6x+7**
5. Même question avec les droites
   c : y = -8x+9 et **d : y = -6x-6**
6. Est-ce possible de faire passer une droite par les points **(-3,2), (-5,6)** et **(-1,-1).** Sans faire de dessin**.**
7. Les points suivants appartiennent-ils à la droite suivante ?
   (-2,3) à la droite d'équation **y = 5x+13**
   (0,-6) à la droite d'équation **y = 65x-6**
   (2,0) à la droite d'équation **y = 4x-8**
   (-2,-2) à la droite d'équation **y = -2x**
   (0,0) à la droite **y = -9x**
   (0,0) à la droite **y = 0**

8. Voici l'équation de plusieurs fonctions. Rends à chacune le graphique qui lui correspond.

a : y=-2x+5 **b : y=6x-2** **c : y=2x**

d : y=3x+3 **e : y=-5x** **f : y=5**