Chapitre II

Autour du théorème de Pythagore.

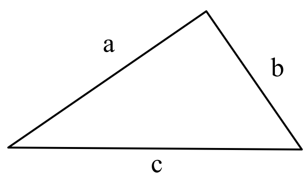
1. **Vers l'énoncé du théorème.**
   Nous allons nous intéresser aux triangles rectangles et plus particulièrement à la manière de calculer le troisième côté de celui-ci quand on connaît les deux autres.
   a) Dessine 5 triangles rectangles. Appelle a et b les côtés de l'angle droit de tes triangles et c le côté opposé à l'angle droit. Ce dernier s'appelle l'hypoténuse. Complète alors le tableau ci-dessous.

	Longueur de a	**Longueur de b**	**Longueur de c**			
1						
2						
3						
4						
5						

Peux-tu trouver une relation qui lie a et b à c ?
Pour t'aider à trouver cette relation, complète les trois dernières colonnes par le carré de chaque côté. Cherche alors le lien entre a^2, b^2 et c^2.

Conclusion on dirait que :

Illustre géométriquement cette supposition.



Cette conclusion est-elle certaine ? Comment la qualifier ? Vois la définition d'une « conjecture ». En est-ce une ? Que faudrait-il faire pour lever le doute ? Qu'est-ce qu'une démonstration ?

b) Travail de groupe (côté) : le but de ce travail est découvrir une démonstration du théorème de Pythagore, de la comprendre, de la présenter au reste de la classe et de pouvoir l'expliquer.

Consignes

- vous allez recevoir par groupe, une démonstration complète de la conjecture de Pythagore. Vous devez la lire attentivement et essayer de la comprendre. N'hésitez pas à utiliser un dictionnaire si vous ne comprenez pas certains mots.
- préparez un exposé avec éventuellement un panneau (ou écrit au tableau.) qui explique de manière claire et sans ambiguïté cette démonstration. Chaque membre doit participer à l'exposé.

Chaque groupe recevra une démonstration différente, preuve qu'il y a beaucoup de chemins différents pour arriver à prouver quelque chose.

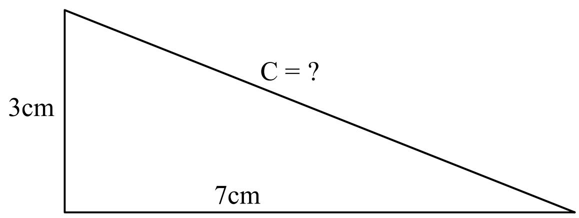
La démonstration de notre conjecture étant réalisée, celle-ci prend le nom de théorème de Pythagore.

Enoncé du théorème de Pythagore :

Dans un triangle rectangle, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.

Utilisation directe :

1) 1er cas : Calcule la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle suivant



D'après Pythagore, on peut écrire :

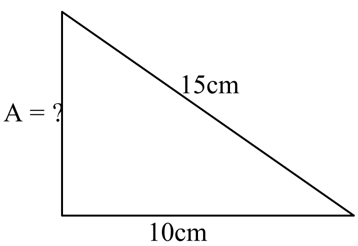
Ainsi c^2 =

Pour trouver c, il faut trouver le nombre qui mis au carré sera égal à ……….
On appelle ce nombre la racine carrée positive de………
Avec la machine à calculer, on peut la trouver : c = $\sqrt{\ldots\ldots\ldots}$ = ………………..

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Avec **c** comme hypoténuse

2) 2ème cas : calcule la longueur du côté de l'angle droit manquant dans le triangle rectangle suivant.



D'après Pythagore, on peut écrire

En isolant le a^2, on obtient

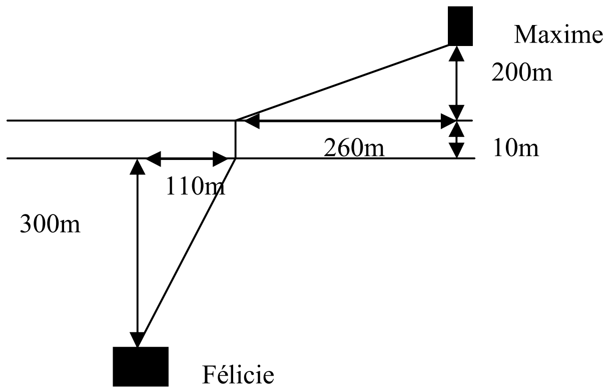
Et en utilisant la racine carrée positive, on trouve :
a= $\sqrt{\ldots\ldots\ldots}$ =

$$\mathbf{a^2 = c^2 - b^2}$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Avec **c** comme hypoténuse

Applications : (sur feuille de cours avec chaque fois un dessin illustrant la situation)

1) Une échelle est appuyée sur un mur à une hauteur de 5m. Elle repose sur le sol à une distance de 1,3m du pied du mur. Quelle est la longueur de l'échelle ?
2) Quelle est la distance à parcourir pour aller de chez Maxime à chez Félicie ? (rivière de 10m de large et ligne droite vers le pont)



3) Les diagonales d'un losange mesurent 7cm et 11cm. Calcule la longueur du côté du losange.
4) Que vaut la longueur de la diagonale d'un rectangle de 12 sur 15 cm de dimensions ?
5) Calcule la longueur de la diagonale d'un carré de 6 cm de côté.
6) La diagonale d'un rectangle mesure 24 cm. Un des côtés du rectangle mesure 18cm. Calcule l'autre.
7) Une échelle de 4m repose sur un mur et atteint la hauteur de 3m60. A quelle distance du mur est-elle posée ?
8) Quelle est la longueur du côté d'un carré si sa diagonale mesure 20 cm ?
9) Quelle est la longueur du côté d'un triangle équilatéral si sa hauteur mesure 6cm ?

2. **Réciproque du théorème de Pythagore.**

Dessine un triangle NON-rectangle. Mesure chacun de ses côtés et vérifie si le théorème de Pythagore s'y applique.

Conclusion :
Le théorème de Pythagore ne s'applique pas aux triangles qui ne sont pas rectangles. Voilà donc un bon critère pour savoir si un triangle est rectangle ou non .

Réciproque du Théorème de Pythagore :

Si dans un triangle, la somme des carrés de deux des côtés est égale au carré du troisième côté, alors le triangle est rectangle.

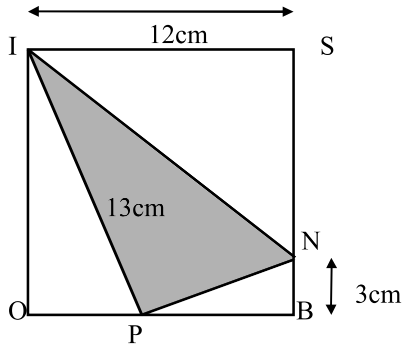
Applications : a) Voici les mesures des côtés d'un triangle : 12cm, 16 cm et 20 cm. Est-il rectangle ?
b) et celui-ci ? 1.5 cm 2,5cm et 2 cm .
c) et celui-ci ? 5cm, 7cm et 9cm ?

Un triangle bien utile : 3 , 4 et 5 . Est-il rectangle ?

La corde à 12 nœuds permet aux maçons de construire un mur à angle droit. Comment ?

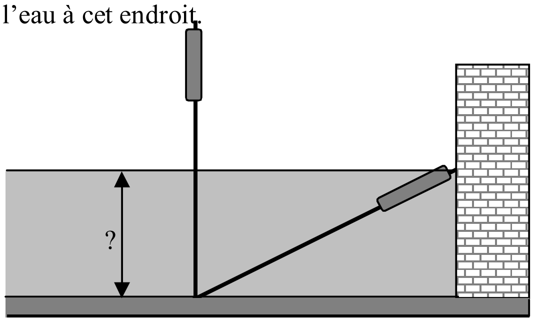
3.Des **exercices.**

1. BOIS est un carré de 12 cm de côté. Le triangle PIN est-il rectangle ? Justifie.



2. La grande diagonale d'un cube mesure 40 cm. Que mesure le côté du cube ?

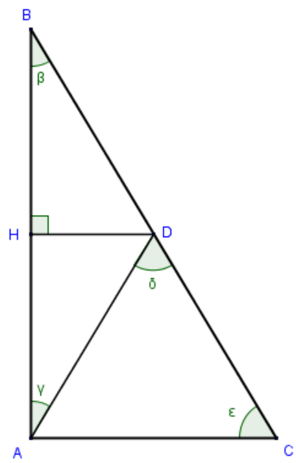
3. (difficile : dépassement) Un roseau planté à la verticale dans le fond d'un plan d'eau, dépasse de 65 cm de la surface. Quand on l'incline, pivotant sur son point d'ancrage, il disparaît tout juste au bord du bassin situé à 80cm de son point d'immersion. Calcule la profondeur de l'eau à cet endroit.



4. Un architecte de jardins doit concevoir une plate bande de fleurs à partir d'une terrasse carrée de côté égal à 6m. Il décide, pour des raisons esthétiques, de dessiner un triangle équilatéral sur la diagonale du carré de la terrasse, côté jardin, et d'allouer l'aire qui dépasse de la terrasse à cette plate bande. Calcule l'aire de celle-ci. (dessin bien sûr)

5. Quelle est la distance entre le point A et le point B sachant que leurs coordonnées sont :
a) A (-1 ; 2) et B (2 ; 3) ?
b) A (-3 ; -1) et B (3 ; 3) ?
c) A (1 ; 5) et B (3 ; -1) ?
(Place les points dans un repère cartésien et exprime la longueur dans la même unité que ton repère

6. Voici le plan d'une charpente. .ABC est un triangle rectangle dont |AB| = 5m, |AC| = 3m et D est le milieu de BC. Trouve les longueurs manquantes soient les longueurs de |BC|, |BD|, |AH|, |HD|, |AD| et, tant qu'on y est les angles !



3. **Les nombres à l'époque de Pythagore.**

Pythagore avait fondé une fraternité (secte ???) qui se basait sur le fait que tout est mesurable avec des nombres. Mais les nombres connus à cette époque étaient uniquement les nombres entiers et leurs dérivés.
Petit rappel :

- les nombres **naturels** sont les nombres qui servent à compter un ensemble d'éléments : 0, 1, 2, 5 ,45, 782…
- Les nombres **entiers** contiennent les naturels mais aussi les négatifs : -2, -8, 5, -45, 0 etc. Ils ont été introduits pour traduire par exemple des dettes …
- On peut bien sûr additionner, soustraire et multiplier des nombres entiers, on obtiendra toujours des nombres entiers.
- Si on divise des nombres entiers les uns par les autres on obtient des nouveaux nombres qui sont des fractions : on les appelle des **rationnels** (ce qui signifie « qui peut se mettre sous forme de rapport, donc de fraction ») ex : ¾ ou 15/56 etc.

Forme décimale d'un rationnel.
a) Sur feuille de cours effectue la mise en forme décimale de :
¾ ; 12/24 ; 17/25 ; 2/3 ; 15/9 ; 13/7 en effectuant la division en calcul écrit.
Observe chaque fois le quotient et tire alors des conclusions.

Conclusions :

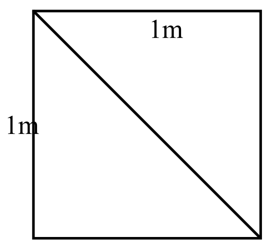
Et à l'inverse ? Quels décimaux peuvent se mettre sous forme de fractions ? Comment procéder ?

- 0, 4 =………… 0,75 =………… 1,36 =……………. 0,012 =…………
- 0,33333…. =……….. 0,1212121212….. = ………………………
- 0,03333333333…. = 0,433333333….. =
- 1,2163636363…… =

Conclusions :

4. **La diagonale d'un carré.**

Que vaut la mesure de la diagonale de ce carré de 1m de côté ? Existe-t-il nombre rationnel qui exprimerait cette longueur ?



Cherche par approximations successives la valeur de la diagonale du carré unitaire. Essaye de trouver 10 décimales exactes.

On peut prouver qu'il est impossible de trouver un rationnel (une fraction) égale à ce nombre.
Voilà qui nous oblige à « inventer » des nouveaux nombres, des nombres qui ne peuvent pas se mettre sous la forme de fractions. On les appelle « irrationnels » $\sqrt{2}$ par exemple en est un.

Ce nombre ne pourra jamais être exprimé de manière exacte puisque sous forme décimale, il ne s'arrête jamais et il n'a pas de période. Il n'existe aucune fraction pour l'exprimer. Pour garder toute la précision lors de calculs dans lesquels ces irrationnels interviennent, on préfèrera garder sous leur forme radical (comme par exemple $\sqrt{2}$), toutes les racines qui ne tombent pas juste. Nous allons donc apprendre à effectuer des opérations portant sur des racines carrées sans écrire leur forme décimale.

Mais tout d'abord :

Définition de la racine carrée positive d'un nombre positif.

La racine carrée positive d'un nombre positif a, est le nombre positif b qui mis au carré égale a.

$$\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a \qquad (a\ et\ b\ \acute{e}\tan t\ \ des\ nombres\ positifs)$$

exemples :

a) 5 est la racine carrée positive de 25 car 5² = 25

b) ………………………..

c) ………………………..

Utilisation de la définition pour calculer quelques racines qui tombent bien ! . (pas de calculatrice)

$1)\sqrt{36}=$

$2)\sqrt{144}=$

$3)\sqrt{0}=$

$4)\sqrt{1}=$

$5)\sqrt{0{,}01}=$

$6)\sqrt{0{,}25}=$

$7)\sqrt{3^2}=$

$8)\sqrt{117^2}=$

$9)\sqrt{10^2}=$

$10)\sqrt{10^8}=$

$11)\sqrt{5^{36}}=$

$12)\sqrt{-4}=$

$13)\sqrt{0{,}49}=$

$14)-\sqrt{4}=$

$15)\sqrt{(-2)^2}=$

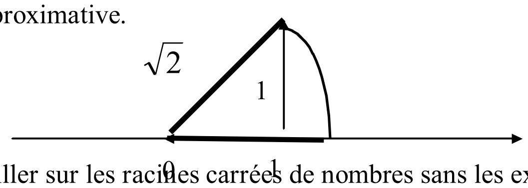
$16)\sqrt{\frac{4}{9}}=$

$17)\sqrt{\frac{25}{121}}=$

$18)\sqrt{\frac{1}{9}}=$

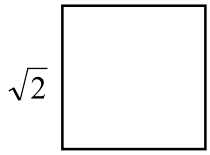
5. **Calculs avec des racines carrées**.

On a vu qu'il n'y a aucun moyen d'écrire la valeur exacte de la racine carrée de la plupart des nombres, on ne peut donner que des valeurs approchées. Attention cela ne veut en aucun cas dire que ces nombres n'existent que de manière imprécise. Un segment de longueur $\sqrt{2}$, par exemple, est tout à fait déterminé. Cette longueur a sa place sur la droite graduée de manière unique. Seule notre façon de l'exprimer sous forme de nombre décimal est approximative.



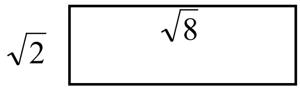
Nous allons donc travailler sur les racines carrées de nombres sans les exprimer sous forme de décimaux pour garder toute leur précision. Voici quelques exemples qui montrent l'intérêt de cette procédure

Exemples :1) Soit à calculer l'aire d'un carré dont le côté mesure $\sqrt{2}$ cm. Effectue les opérations en donnant à $\sqrt{2}$ une valeur approchée, 1,4 par exemple. Qu'en penses-tu ?

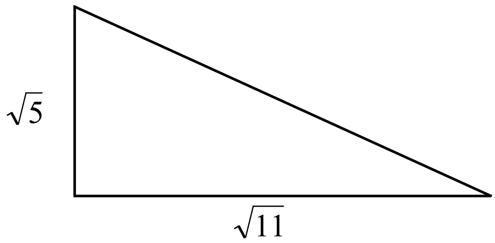


2) Soit à calculer la somme : $\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2} - 3\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2} =$

3) Soit à calculer l'aire d'un rectangle dont les côtés valent $\sqrt{2}$ et $\sqrt{8}$ cm. Donne à ces deux racines une valeur approchée. Qu'en penses-tu ?



4) Soit à calculer l'hypoténuse du triangle rectangle dont les mesures des côtés de l'angle droit valent : $\sqrt{5}$ cm et $\sqrt{11}$ cm .



5) Calcule le volume d'un parallélépipède dont les côtés mesurent $\sqrt{6}, \sqrt{3}$ *et* $\sqrt{2}$

<u>**Technique de calcul sur des racines carrées.**</u>

Règles fondamentales de calcul sur les racines carrées. Vérifie avec des exemples et démontre avec la définition.

Si a et b sont des nombres positifs, alors on peut écrire :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$$

Utilisation de ces formules : (attention, sans calculatrice)

Remarque : les nouvelles calculatrices effectuent les opérations sur les racines carrées en gardant les réponses sous forme de racines carrées simplifiées. Mais pour la compréhension des mécanismes, il est impératif de ne pas les utiliser.

A) Simplification

But : ramener les radicaux à leur plus simple expression pour pouvoir les comparer ou les additionner

1. Faire apparaître, sous le radical, des carrés parfaits.

2. Pour trouver la racine carrée d'une puissance paire, il suffit de diviser par deux l'exposant.
3. Si l'exposant est impair, il faut décomposer la puissance en faisant apparaître l'exposant directement inférieur.
4. On peut, si nécessaire, décomposer le nombre en facteurs premiers avant de calculer sa racine carrée.

Exemples :

$$1)\ \sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2)\ \sqrt{5^4} = 5^2 = 25$$

$$3)\ \sqrt{3^5} = \sqrt{3^4\cdot 3} = \sqrt{3^4}\sqrt{3} = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$3)\ \sqrt{2^3\cdot 3^5} = \sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3^4\cdot 3} = 2\cdot 3^2\sqrt{2\cdot 3} = 18\sqrt{6}$$

Exercices.

$1)\sqrt{3^4} =$

$2)\sqrt{5^6} =$

$3)\sqrt{2^{100}} =$

$4)\sqrt{2^3} =$

$5)\sqrt{2^7 3^9} =$

$6)\sqrt{288} =$

$7)\sqrt{10^{13}} =$

$8)\sqrt{16\cdot 10^8} =$

$9)\sqrt{90} =$

$10)\sqrt{98} =$

$11)\sqrt{18} =$

$12)\sqrt{27} =$

$13)\sqrt{50} =$

$14)\dfrac{1}{5}\sqrt{800} =$

$15)\sqrt{4000} =$

$16)\sqrt{72} =$

$17)\dfrac{1}{3}\sqrt{90} =$

$18)2\sqrt{250} =$

$19)\dfrac{1}{5}\sqrt{25} =$

$20)\sqrt{450} =$

B) Addition et soustraction

Après simplification , $\sqrt{12}$ devient $2\sqrt{3}$

2 est le coefficient , 3 est le radicand .

Des radicaux semblables sont des radicaux qui après simplification, ont le même radicand.

Exemples :

$3\sqrt{2}$ et $5\sqrt{2}$

$4\sqrt{10}$ et $-3\sqrt{10}$

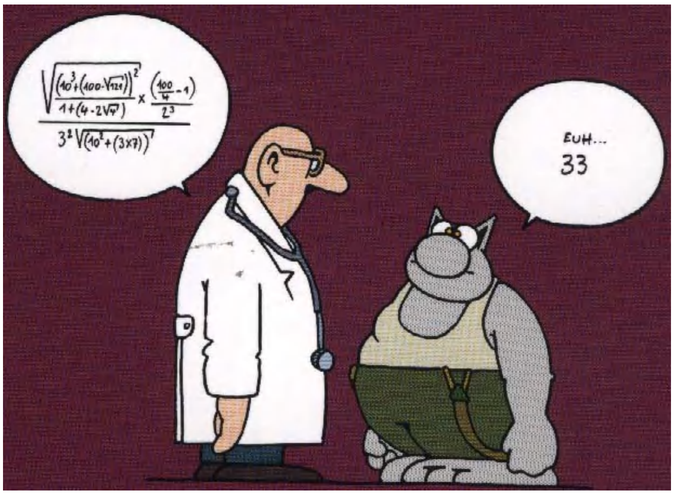
Pour additionner des radicaux, il faut d'abord les simplifier ensuite additionner les radicaux semblables.

Exemples :

$$1)2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$2)\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{50} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Exercices : Simplifie puis réduis.



1) $2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}=$

2) $\sqrt{12}+2\sqrt{75}-3\sqrt{48}=$

3) $2\sqrt{20}-4\sqrt{125}+\sqrt{45}=$

4) $2\sqrt{3}-4\sqrt{2}-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}=$

5) $\sqrt{24}-3\sqrt{6}+5\sqrt{12}-3\sqrt{48}=$

c) Multiplication.

$$\boxed{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}}$$

1) $\sqrt{27}\sqrt{3}\ =$

2) $\sqrt{12}\sqrt{32}\ =$

3) $\sqrt{6}\sqrt{30}\ =$

4) $3\sqrt{2}\sqrt{8}\ =$

5) $\sqrt{105}\sqrt{15}\ =$

6) $\sqrt{12}\sqrt{\frac{1}{27}}\ =$

d) Division.

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}=$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

Exercices :

1) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}=$ 2) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}}=$

e) Puissances.

$$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n}}$$

$\left(\sqrt{2}\right)^4=$

$\left(\sqrt{3^3}\right)^3=$

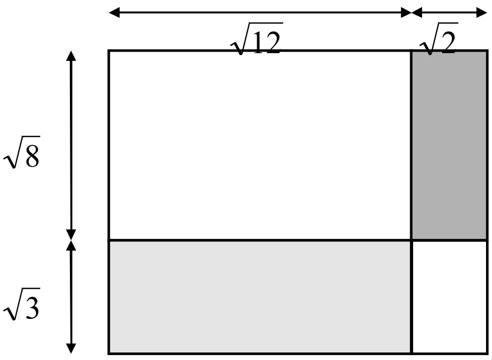
Exercices :

1) $\left(2\sqrt{2}\right)^2\ =$ 3) $\left(-2\sqrt{3}\right)^4\ =$ 5) $\left(\sqrt{2^3 5}\right)^5\ =$

2) $\left(3\sqrt{5}\right)^2\ =$ 4) $\left(\sqrt{2^2}\right)^3\ =$ 6) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\ =$

f) Distributivité

1. Distribuer
2. Simplifier
3. Réduire.



1) $\left(\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - \sqrt{32}\right)\sqrt{2} =$

2) $\left(\sqrt{12} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27}\right)\sqrt{6} =$

3) $\left(\sqrt{6} - 2\sqrt{24} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{12}\right)\sqrt{6} =$

4) $\left(\sqrt{\frac{8}{5}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{40}\right)\sqrt{10} =$

5) $\left(5\sqrt{12} + \sqrt{84} - 3\sqrt{27}\right) \cdot 2\sqrt{21} =$

6) $\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{3}\right) =$

7) $\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right) =$

8) $\left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) =$

9) $\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{7}\right) =$

10) $\left(2\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}\right) =$

g) **produits remarquables**

pense aussi à utiliser la formule : **(a + b) (a - b) = a^2 - b^2**

1) $\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right) =$

2) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) =$

3) $\left(2\sqrt{3} + 5\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{3} - 5\sqrt{7}\right) =$

4) $\left(9 + 2\sqrt{10}\right)\left(9 - 2\sqrt{10}\right) =$

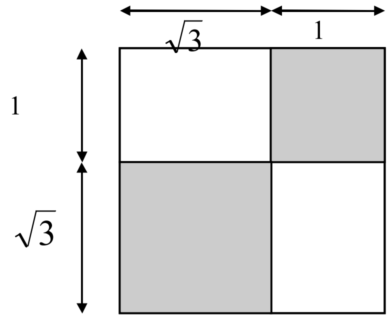
5) $\left(-5 - 2\sqrt{3}\right)\left(-5 + 2\sqrt{3}\right) =$

6) $\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) =$

7) $\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}\right) =$

et pense aussi au carré de binôme . **$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



8) $\left(1+\sqrt{3}\right)^2 =$

9) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 =$

10) $\left(2\sqrt{3}-5\right)^2 =$

11) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 =$

12) $\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2 =$

g) attention aux priorités des opérations !

1) $\sqrt{2^5+2^2} =$

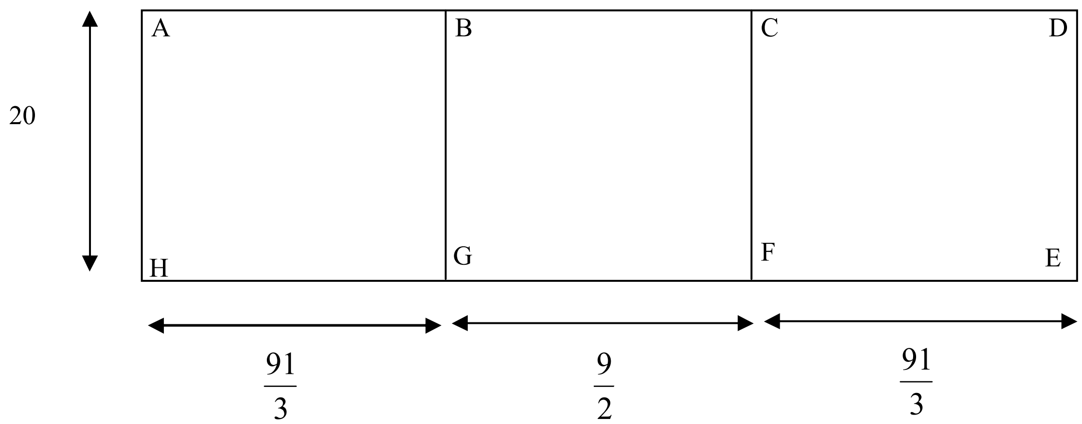
3) $\sqrt{2^4 \cdot 3 + 1} =$

2) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{27}} =$

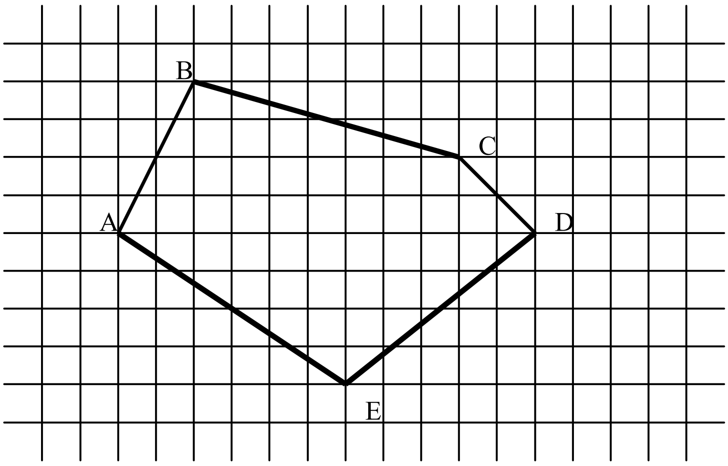
4) $\sqrt{8^4-2^4} =$

h) Exercices variés reprenant l'essentiel des notions vues dans ce chapitre.

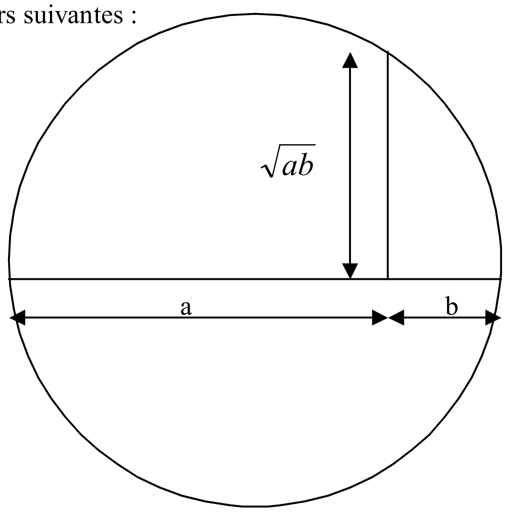
1. Vérifie que toutes les distances entre deux points des huit points donnés sont rationnelles.



2. Calcule le périmètre de ce pentagone si on prend comme unité un côté d'un petit carré.



3. Les géomètres grecs utilisaient la construction suivante pour obtenir la racine carrée $\sqrt{ab}$ du produit de deux nombres a et b.
   a) Montre que cette construction est exacte.
   b) par cette méthode représente les longueurs suivantes :
   $\sqrt{6}$; $\sqrt{20}$ et $\sqrt{15}$



4. Observe la série de calculs suivante. Donne chaque fois la réponse. Etablis une conjecture en généralisant. Démontre.

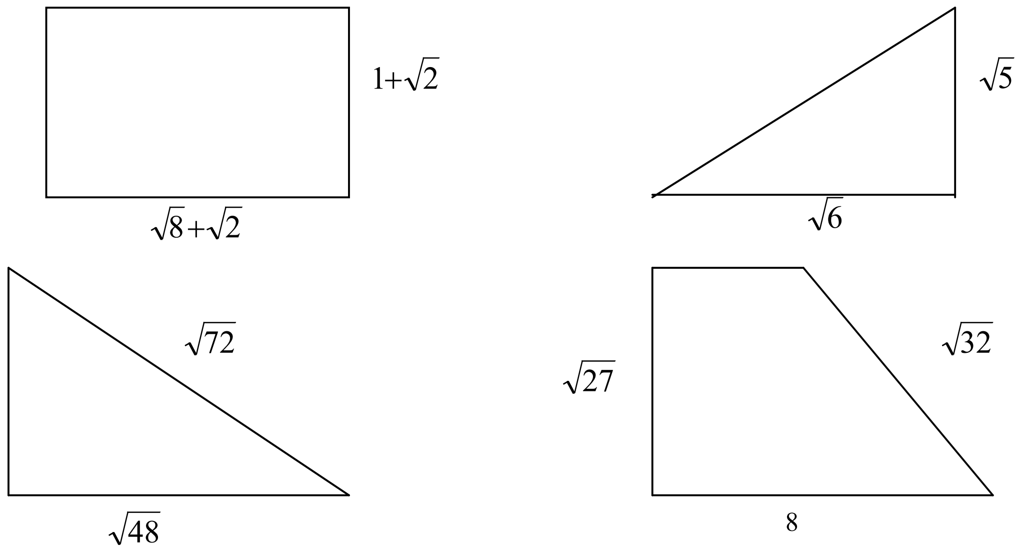
$\sqrt{1\cdot 3+1} =$

$\sqrt{2\cdot 4+1} =$

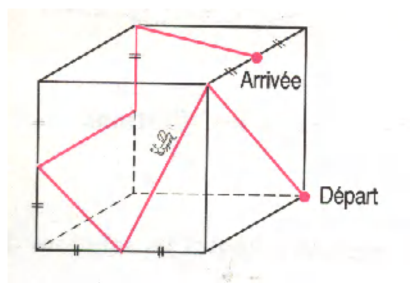
$\sqrt{3\cdot 5+1} =$

$\sqrt{4\cdot 6+1} =$

5. Calcule l'aire et le périmètre des figures suivantes sous forme de racines carrées simplifiées.



6. Ballade sur un cube. Un insecte capricieux (comme le glossina palpalis per exemple) chemine sur un cube de 6cm d'arête.
Démontre que le chemin qu'il a parcouru est égale à $9+9\sqrt{2}+6\sqrt{5}$



7. L'escargot de pythagore. Tous les triangles sont rectangles.
Le pourtour est fait de segments de 1cm. Calcule toutes les longueurs.